Piotr Surma
Uniwersytet Warszawski

Logique Ł-modale de Łukasiewicz

Cet article a pour objectif de reconstruire la genèse du système Ł-modale de Jan Łukasiewicz et de rétablir la relation entre celle-ci et les idées philosophiques de son auteur[1].

Dans l'article, on appliquera la notation modernisée qui, pour le possible et le nécessaire utilise les symboles standards à l'heure actuelle, respectivement ◊ et □. Néanmoins, il ne faut pas oublier que chez Łukasiewicz ces deux notions ont une signification entièrement différente que les modalités dans les systèmes contemporains desquels les symboles appliqués ont été puisés. Notamment, aujourd'hui, on reconnaît habituellement le caractère intensionnel des foncteurs modaux, tandis que dans les systèmes de Łukasiewicz, les modalités sont extensionnelles.

Système modal L_3

Le premier système modal de Łukasiewicz a eu pour base le calcul propositionnel trivalent L_3. Il a été décrit pour la première fois dans son article intitulé *Uwagi filozoficzne o wielowartościowych systemach rachunku zdań*[2] qui date de 1930. Dans le même article Łukasiewicz constate, que tout le système de la logique trivalente doit son origine aux recherches concernant les propositions modales[3]. Le raisonnement qui lui a permis de la formuler est fondé sur la conviction que les

[1] L'auteur désire remercier Paulina Błaszczykiewicz pour son aide linguistique au cadres de la preparation de cet article.

[2] J. Łukasiewicz, *Uwagi filozoficzne o wielowartościowych systemach rachunku zdań*, idem, *Z zagadnień logiki i filozofii*, Warszawa 1961.

[3] *Ibidem*, p. 144.

foncteurs modaux sont extensionnels. Cette conviction, notamment répandue au sein de l'Ecole de Lvov-Varsovie, comme le mentionne Jan Woleński, était inébranlable dans la pensée de Łukasiewicz de la période au cours de laquelle il avait élaboré les fondements de la logique modale polyvalente, jusqu'à la fin de ses jours. Un passage de *Sylogistyka Arystotelesa z punktu widzenia współczesnej logiki formalnej* publié en 1953 constitue une preuve évidente de la conviction immuable concernant le caractère extensionnel des foncteurs modaux :

> [La loi d'extensionnalité] semble (...) parfaitement évidente. Il ne l'est pas pourtant si on considère les fonctions modales comme fonctions intensionnelles, c'est à dire les fonctions dont valeurs de vérité ne dépendent exclusivement des valeurs de vérité de leurs arguments. Cependant, jusqu'ici, ce que signifieraient dans ce cas-là les notions du nécessaire et du possible reste pour moi un mystère[4].

Cependant, c'est le caractère extensionnel de la logique modale L_3, qui mène aux nombreux problèmes d'interprétation et paradoxes.

La formule ◊p dans la logique L_3 est décrite par la table de vérité suivante :

p	◊p
0	0
½	1
1	1

Elle est donc fausse si et seulement si son argument est faux. Si son argument est vrai ou s'il a une troisième valeur logique, la proposition 'il est possible que p' soit vrai. Selon Łukasiewicz « cela est conforme à nos intuitions ». Les commentateurs ont cependant mis en doute le caractère intuitif de plusieurs thèses de la logique modale trivalente, entre autres :

[4] J. Łukasiewicz, *Sylogistyka Arystotelesa z punktu widzenia współczesnej logiki formalnej*, Warszawa 1988, p. 189.

a) $\nu(\neg\Diamond p) = 1$ pour $\nu(p) = 0$ ('impossible que p' soit automatiquement vrai pour 'p' qui est faux)[5]

b) $\nu(\Diamond p \wedge \Diamond\neg p) = 0$ pour $\nu(p) = 1$ et $\nu(p) = 0$ ('il est contingent que p' est automatiquement faux aussi bien pour 'p' étant vrai que pour 'p' étant faux)

c) $\nu(\Diamond p) = 0$ pour $\nu(p) = 0$ ('possible que p' est faux pour 'p' étant faux)

Paradoxes modaux

C'est Gonseth qui a frappé un grand coup sur l'interprétation modale du système L_3[6]. Bien que son argument ait visé la logique trivalente sans les foncteurs modaux, les problèmes signalés là-dedans peuvent être facilement saisis aussi dans la version modale de la logique de Łukasiewicz. Or, pour une proposition quelconque qui possède la troisième valeur logique ; la conjonction de cette proposition et de sa négation possède aussi une troisième valeur logique. Elle est donc, selon Łukasiewicz, une proposition possible. Conséquemment, dans la logique modale L_3, $\nu[\Diamond(p \wedge \neg p)] = 1$ pour $\nu(p) = ½$, pendant que l'intuition nous souffle, que la proposition $\Diamond(p \wedge \neg p)$ doit être fausse pour chaque *p.*

Łukasiewicz longtemps ne commentait pas le sujet de paradoxes de la logique modale pour finalement pointer lui-même des difficultés concernant non seulement le système L_3, mais – selon lui – tous les systèmes de la logique modale. En 1954, il a décrit un paradoxe qui apparaissait comme la suite de l'acceptation du mode syllogistique d'Aristote à prémisse apodictique et l'autre assertorique[7].

$\Box$(chaque *b* est *a*) $\rightarrow$[(chaque *c* est *b*) $\rightarrow\Box$(chaque *c* est *a*)]

[5] Le symbole 'ν' signifiera la valuation.

[6] F. Gonseth (red.), *Les entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques 6–9 décembre 1938*. Zurich.

[7] J. Łukasiewicz, *O pewnym spornym problemie arystotelesowskiej sylogistyki modalnej*, idem, *Logika i metafizyka*, Warszawa 1998.

En remplaçant dans le syllogisme le *a* pour le *b,* on obtient :

$\Box$(chaque *a* est *a*) $\rightarrow$[(chaque *c* est *a*) $\rightarrow\Box$(chaque *c* est *a*)]

En admettant d'après tous les logiciens « de Aristote à Carnap (...) que toutes les propositions analytiques sont nécessairement vraies »[8] on obtient une conclusion paradoxale :

(chaque *c* est *a*) $\rightarrow\Box$(chaque *c* est *a*)

Łukasiewicz constate que cette conclusion ne peut pas être vraie, sinon, pour quelconque *c* et *a*, la proposition assertorique « chaque *c* est *a* » serait équivalente à la proposition apodictique identique puisque l'implication $\Box$(chaque *c* est *a*)$\rightarrow$(chaque *c* est *a*) est un remplacement de la thèse modale acceptée.

Łukasiewicz cherche une explication de ce paradoxe chez Aristote. Dans le chapitre 15 du Livre Premier de *Premiers analytiques* il trouve deux lois modales nommées par lui « les lois d'extensionnalité » :

$(p \rightarrow q) \rightarrow (\Diamond p \rightarrow \Diamond q)$
$(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$

De cette deuxième formule découle l'implication : $\Box q \rightarrow (p \rightarrow \Box p)$ à la base de laquelle, en vertu de la formule réfutée : $p \rightarrow \Box p$ et de la règle de détachement, on obtient une formule réfutée $\Box\alpha$, pour toutes les interprétations de α. Cela veut dire que aucune des propositions apodictiques n'est pas vraie, en particulièr la prémisse $\Box$(chaque a est a) est fausse.

Comme on le verra plus tard, le rejet des propositions nécessaires joue un rôle principal dans le système Ł-modal. Remarquons, pourtant, que les lois de l'extensionnalité qui constituent un fondement de ce rejet s'opposent aux intuitions de base concernant la modalité. Analysons la formule : $(p\rightarrow q) \rightarrow (\Diamond p \rightarrow\Diamond q)$. Si l'on remplace le *p* par une proposition occasionnellement fausse (par exemple 'Je suis à Paris maintenant' pendant qu'en écrivant ces mots, je suis à Varsovie), et le *q* par une proposition nécessairement fausse (par exemple '2x2=5'),

[8] *Ibidem*, p. 257.

à la suite du double détachement des formules vraies, on obtient une conclusion paradoxale : 'il est possible que 2x2=5'. La formule en question devient plus compréhensible, si l'on accepte l'interprétation de nécessité introduite au système L_3 par Prior[9] : si *p* est une proposition fausse, alors ◊p est aussi fausse et on ne peut pas effectuer le deuxième détachement et obtenir la conclusion paradoxale ◊q. L'origine de ces lois controversées est signalée même dans leur nom : Łukasiewicz les introduit en vertu d'une forte conviction que les foncteurs de nécessité et de possibilité sont extensionnels.

Influencé par les articles de Quine (*The problem of interpretating modal logic*[10] et *Three Grades of Modal Involvement*[11]), Łukasiewicz a aperçu aussi un autre paradoxe modal lié à une théorie dite « de l'identité »[12]. Une reconstruction de ce paradoxe se fonde sur deux axiomes :

x=x (x est identique à x)

$x=y \rightarrow (\phi\, x \rightarrow \phi\, y)$

[9] A. Prior, *Three-Valued Logic and Futur Contingents,* „The Philosophical Quarterly", vol. 3, no 13, (1953). Actuellement on affirme que la valeur de vérité des propositions (autres qu'occasionnelles) ne change pas dans le temps. La logique trivalente a été cependant créée pour décrire le futur indéterminé. La valeur logique de '1' est donc accordée aux propositions qui sont définitivement vraies : soit pour qu'elles se réfèrent aux relations non-temporelles (par ex. 2+2=4), soit pour qu'elles se réfèrent au passé ou au présent, soit encore, en raison de leur relation aux faits futurs dont l'occurrence est déjà déterminée. La valeur logique de '0' est accordée aux propositions définitivement fausses de raisons mentionnées au-dessus. Aux propositions concernant le futur indéterminé on attribue la valeur logique ½. Grâce à cette interprétation, selon Prior, on peut saisir le sens dans lequel ce qui est définitivement faux est impossible, et ce qui est définitivement vrai est nécessaire.

[10] W. V. Quine, *The problem of interpreting modal logic*, „The Journal of Symbolic Logic", vol. 12, no 2, 1947.

[11] W. V. Quine, *Three grades of modal involvement*, idem, *The Ways of Paradox*, Oxford University Press 1966.

[12] J. Łukasiewicz, *O pewnym spornym problemie arystotelesowskiej sylogistyki modalnej*, op. cit., p. 264.

où ‘x’ et ‘y’ signifient les objets individuels et ϕ est un foncteur propositionnel variable, d’un argument individuel.

Dans le deuxième axiome, en remplaçant le ϕ par ‘*x* est nécessairement identique à ...’ on obtient :

$$(x=y) \rightarrow (\Box(x=x) \rightarrow \Box(x=y))$$

De la loi de commutation on obtient :

$$\Box(x=x) \rightarrow (x=y \rightarrow \Box(x=y))$$

En admettant que la proposition x=x est analytique (et pour cela - nécessairement vraie) et en détachant, par la suite, $\Box(x=x)$, on obtient :

$$x=y \rightarrow \Box(x=y)$$

De cette proposition, en vertu de loi de contraposition, on obtient une formule que Łukasiewicz trouve paradoxale :

$$\neg\Box(x=y) \rightarrow \neg(x=y)$$

qui dit que deux objets quelconques sont différents s’il n’est pas nécessaire qu’ils soient identiques.

Łukasiewicz résout le paradoxe de la « théorie de l’identité »[13] de la même manière qu’il l’a fait dans le cas du paradoxe de la syllogistique aristotélicienne, c’est-à-dire par le rejet de la prémisse $\Box(x=x)$. En concluant ses considérations, il écrit :

> [la formule réfutée $p \rightarrow \Box p$] au sein du calcul classique des propositions mène à une contradiction entre la loi de l’extensionnalité d’Aristote (...) et le fait qu’il a présumé les propositions apodictiques vraies. Je suis absolument convaincu que tous les arguments prouvent la justesse de la loi de l’extensionnalité qui est la pierre d’angle de tous les systèmes de la logique modale. (...)
> Sur le fondement constitué par ces réflexions, inspirées par Aristote lui-même, j’ai pu construire un système complet de la logique modale qui correspond à toutes nos intuitions concernant la modalité et qui est dépourvu des faiblesses d’autres systèmes logiques[14].

[13] *Ibidem*

[14] *Ibidem*, p. 261

La même problématique, néanmoins cette fois dans le domaine de l'arithmétique, a été analysée par Łukasiewicz aussi dans son article *Arytmetyka i logika modalna*, publié en 1954 :

> Étant données les difficultés relatives au fait [d'accepter les propositions apodictiques vraies], je suis disposé à présumer que tous les systèmes de la logique modale qui acceptent les jugements apodictiques admis sont faux.[15]

Cette déclaration montre que Łukasiewicz était persuadé que les paradoxes modaux qu'il avait présentés concernaient la plupart si ce n'est toutes les logiques modales. Entre autre, les logiques modales de Lewis a la base de l'implication stricte sont erronées :

> Les systèmes de Lewis sont bien évidement très intéressants et présentent des avantages, pourtant je crois qu'ils ne peuvent pas, non plus, être admis comme des systèmes pertinents de la logique modale.[16]

En dehors des sujets liés aux paradoxes résultant du fait d'accepter la vérité des propositions apodictiques, Łukasiewicz note aussi un problème concernant la contingence, qui selon lui, a affligé les logiques modales dès le temps d'Aristote. En vertu de la thèse de la protothétique de Leśniewski « en vigueur dans la logique classique des propositions incluant un foncteur variable δ »[17], le philosophe démontre cette thèse paradoxale que : « si l'on admet quelconque proposition contingente qu'on estime vraie, il faut admettre, quelconque proposition qui est possible »[18]. La thèse de la protothétique $\delta p \to (\delta\neg p \to \delta q)$ en vertu de la loi de l'importation équivaut à la thèse $(\delta p \land \delta\neg p) \to \delta q$. En remplaçant δ par la possibilité on obtient : $(\Diamond p \land \Diamond\neg p) \to \Diamond q$. Par la suite, à travers le détachement de $\Diamond p \land \Diamond\neg p$ on arrive à la conclusion paradoxale : $\Diamond q$ pour quelconque *q*.

---

15 J. Łukasiewicz, *Arytmetyka i logika modalna*, idem, *Logika i metafizyka*, op. cit., p. 337.

16 *Ibidem*, p. 338.

17 J. Łukasiewicz, *Sylogistyka Arystotelesa z punktu widzenia współczesnej logiki formalnej*, op. cit., p. 210.

18 *Ibidem*

Il est probable que tous les paradoxes modaux signalés ci-dessus ont finalement poussé Łukasiewicz à réviser ses opinions et à réfuter le système modal L_3. Dans un commentaire de la genèse de la logique tétravalente, il écrit :

> (...) en 1920, j'ai construit un système trivalent de la logique modale, développé plus tard dans mon article de 1930. Aujourd'hui, je vois clair que le système ne satisfait toutes nos intuitions concernant la modalité et qu'il doit être remplacé par le système [Ł-modal][19].

Le système Ł-modal

Łukasiewicz commence sa réflexion sur le système Ł-modal par la détermination de l'ensemble des thèses de « la logique modale de base » constituant, selon lui, une partie de tous les systèmes qu'on peut considérer comme « la logique modale ». Les thèses sont divisées en deux groupes : les thèses admises (marquées par '$\vdash$') et les thèses réfutées (marquées par '$\dashv$') :

(1) $\vdash p \rightarrow \Diamond p$
(2) $\vdash \Box p \rightarrow p$
(3) $\vdash \Box p \equiv \neg \Diamond \neg p$
(4) $\vdash \Diamond p \equiv \neg \Box \neg p$
(5) $\dashv \Diamond p \rightarrow p$
(6) $\dashv p \rightarrow \Box p$
(7) $\dashv \Diamond p$
(8) $\dashv \neg \Box p$

Pour les formules admises, on applique les règles classiques de remplacement et de détachement. Pour les formules réfutées, la règle de remplacement dit que si α est réfuté et β est un remplacement de α, alors β doit être réfuté. La règle de détachement pour ces formules dit que si α → β est une formule admise et β est réfuté, alors α doit être réfuté.[20]

[19] *Ibidem*, p. 224.

[20] J. Łukasiewicz, *System logiki modalnej*, idem, *Logika i metafizyka*, op.cit., p. 277-278.

Les formules 1 à 6, comme l'affirme Łukasiewicz, puisent dans la tradition philosophique, et les formules 7 à 8 doivent être réfutées, sinon « Δp signifiera la même chose que '*Verum de p*' et Γp[21] le même que '*Falsum de p*'»[22]. Tout comme pour le système L_3, le point de départ pour la genèse de la logique Ł-modale constitue une supposition de l'extensionnalité des foncteurs modaux, sur laquelle Łukasiewicz a construit une conclusion concernant la polyvalence du système Ł-modal.

> Je présume qu'aussi bien Δ que Γ sont des foncteurs propositionnels à un argument propositionnel et que Δp et Γp sont des fonctions véri-fonctionnelles (…). Dans la logique bivalente, il n'y a aucun foncteur unaire qui suive les formules (1), (5) et (7) ou (2), (6) et (8); il est donc clair que la logique modale de base – et conséquemment chaque système de la logique modale – est un système polyvalent.[23]

Puisque « la logique modale de base est un système imparfait »[24], elle exige d'être complétée par les lois d'extensionnalité pour les foncteurs du possible et du nécessaire, puisées dans les *Premiers Analytiques* d'Aristote:

$\vdash (p \to q) \to (\Diamond p \to \Diamond q)$
$\vdash (p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$

Łukasiewicz trouve que le système Ł-modale suit « la loi générale de l'extensionnalité »:

$\vdash (p \equiv q) \to (\delta p \to \delta q)$, où δ est un foncteur propositionnel variable à un argument propositionnel.

Ainsi, il peut s'appuyer sur le δ-système du calcul classique des propositions formulé par Łukasiewicz (inspiré de la protothétique de Leśniewski)[25].

[21] Łukasiewicz utilise les symboles Δ et Γ pour marquer respectivement la possibilité et la nécessité.

[22] J. Łukasiewicz, *System logiki modalnej*, op. cit., p. 246.

[23] *Ibidem*

[24] *Ibidem*, p. 247.

[25] J. Łukasiewicz, *O zmiennych funktorach od argumentów zdaniowych,* idem, *Z zagadnień logiki i filozofii*, op. cit.

Finalement, le système Ł-modale s'appuie sur la règle de remplacement (incluant le remplacement avec l'apostrophe contre un foncteur variable[26]) et sur les systèmes d'axiomes suivants:

(a) Présumons que $\Diamond$ soit un terme modal primitif:

(M) $\vdash \delta p \to (\delta \neg p \to \delta q)$
(1) $\vdash p \to \Diamond p$
(5) $\dashv \Diamond p \to p$
(7) $\dashv \Diamond p$

(b) Présumons que $\Box$ soit un terme modal primitif:

(M) $\vdash \delta p \to (\delta \neg p \to \delta q)$
(2) $\vdash \Box p \to p$
(6) $\dashv p \to \Box p$
(8) $\dashv \neg \Box p$

Examinons les conséquences du système Ł-modale. Il semble qu'une des plus importantes de celles-ci – ou même la plus importante – soit la thèse:

(9) $\dashv \Box p$

D'après cette dernière, si α est une formule quelconque (bien construite) du système Ł-modale, alors la formule $\Box\alpha$ est rejetée. La formule pré-citée émane directement des axiomes du système: en vertu des axiomes (1), (7) et de la règle de détachement pour les formules réfutées, nous obtenons la formule réfutée $\dashv p$. En vertu de celle-ci, de l'axiome (2) et de la règle de détachement pour les règles réfutées, nous obtenons la formule $\dashv \Box p$. Ainsi, la dernière formule résulte directement de la formule réfutée (7) et des thèses modales traditionnelles (1) et (2).

En réfutant les jugements apodictiques, Łukasiewicz élimine alors les prémisses qui ont mis en évidence les paradoxes modaux décrits ci-devant. Cette solution rencontre, pourtant, deux problèmes

[26] *Ibidem*

importants. Tout d'abord, elle engendre la question de savoir si un système de logique modale qui réfute tout jugement apodictique, mais qui admet les jugements problématiques est pertinent. La réponse de Łukasiewicz est la suivante:

> Si quelqu'un s'oppose à l'introduction, dans le domaine de la logique, de propositions qui ne sont jamais vraies, je répondrais que la logique modale est importante et utile comme une théorie du Possible, et quand nous introduisons la possibilité dans la logique, nous ne pouvons pas omettre sa négation: la nécessité, puisqu'elles sont reliées inséparablement[27].

Le deuxième problème est relié au fait qu'en réfutant toutes les propositions apodictiques, Łukasiewicz est obligé de nier aussi la nécessité des jugements analytiques. Cependant, ils sont universellement considérés comme nécessairement vrais, et « cette opinion remonte déjà aux temps d'Aristote »[28]. Łukasiewicz présente les arguments suivant contre les vrais jugements nécessaires dont les jugements analytiques nécessairement vrais:

> A la lumière des formules $\vdash$CLpp [$\vdash \Box p \rightarrow p$] et $\dashv$ CpLp [$\dashv p \rightarrow \Box p$], on présume que les jugements apodictiques sont plus importants et plus fiables que les jugements assertoriques respectifs. A mon avis, cette conséquence n'est d'aucune manière évidente. Je ne peux pas appréhender pourquoi la vraie proposition découlant de la signification des mots « Je suis un homme » serait plus fiable que la vérité résultant de l'expérience « J'ai des yeux marron »[29].

Aussi ajoute-t-il:

> (…) on ne perd rien en n'admettant pas les propositions vraies apodictiques. Il est vrai, bien sûr, que chaque a est a, si a n'est pas un terme vide, mais on ne gagne rien en disant que c'est vrai par nécessité.

[27] J. Łukasiewicz, *O pewnym spornym problemie arystotelesowskiej sylogistyki modalnej*, op. cit., p. 261.

[28] J. Łukasiewicz, *Arytmetyka i logika modalna*, idem, *Logika i metafizyka*, op. cit., p. 336.

[29] *Ibidem*

> Il n'est pas nécessaire d'admettre des propositions « supervraies », puisqu'il n'existe rien de plus fort que la vérité[30].

A part la réfutation des jugements catégoriques, le système Ł-modale possède aussi d'autres caractéristiques contestables du point de vue de leur interprétation très intuitive. Ainsi, il existe dans ce système deux foncteurs du Possible jumeaux (selon la notation originale de Łukasiewicz M et W). Les tables de vérité des foncteurs du Possible M et W sont identiques sur les lignes qui correspondent aux arguments interprétés comme le vrai et le faux (c-à-d 1 et 4). Sur les lignes qui correspondent aux valeurs logiques interprétées comme la possibilité (c-à-d 2 et 3) les tables sont inversées (c-à-d là où pour le W apparaît la valeur 1, pour le M apparaît la valeur 3 et vice versa).

p	Mp	Wp
1	1	1
2	1	3
3	3	1
4	3	3

Łukasiewicz décrit les possibilités jumelles de la manière suivante:

> *W* représente le même foncteur que *M* et doit avoir les mêmes propriétés que *M*. Si *M* signifie une possibilité, alors *W* doit le signifier aussi. Il ne peut pas donc y avoir de différence entre ces deux possibilités. Même si *M* et *W* sont identiques, quand ils sont présents dans la même formule, ils se comportent de manière différente. Ils sont comme des jumeaux identiques que l'on ne peut pas différencier quand on les rencontre séparément, mais si on les voit ensemble, on les différencie tout de suite[31].

---

[30] J. Łukasiewicz, *O pewnym spornym problemie arystotelesowskiej sylogistyki modalnej*, op. cit., p. 261.

[31] J. Łukasiewicz, *Sylogistyka Arystotelesa z punktu widzenia współczesnej logiki formalnej*, op. cit., p. 233.

En tant qu'exemples illustrant le comportement des foncteurs jumeaux du Possible, Łukasiewicz indique le fait que dans le système Ł-modale les formules MWp et WMp sont admises, alors que les formules MMp et WWp sont réfutées. Les formules WMp et MWp ne sont pas exprimables dans le langage naturel. Elles ne peuvent pas être interprétées comme « il est possible qu'il est possible que *p* », puisqu'une telle interprétation pourrait signifier WWp, MMp, WMp aussi bien que MWp.

Même si la différence entre les foncteurs jumeaux du Possible est dépourvue d'interprétation intuitive, les foncteurs-mêmes sont indispensables dans le système Ł-modale pour conserver une certaine intuition. Dans ce système, le problème des propositions contingentes est résolu en réfutant la formule $\Diamond p \wedge \Diamond \neg p$ en vertu de l'axiome (7). Pour certains *p*, les formules $Mp \wedge W\neg p$ et $Wp \wedge M\neg p$ sont, pourtant, vraies puisqu'elles peuvent être interprétées comme « il est M–possible que p et il est W–possible que non-*p* » et « il est W–possible que *p* et il est M–possible que non-*p* ». Łukasiewicz définit aussi deux foncteurs: de X-contingence (Mp □ W¬p) et de Y-contingence (Wp □ M¬p). En vertu de ces définitions, il démontre que les propositions X-contingentes et Y-contingentes existent, bien qu'il soit vrai que les propositions contingentes tout court n'existent pas. De plus, chaque proposition est X-contingente ou Y-contingente (ce qui constitue une sorte d'équivalent du principe du tiers exclu) et aucune proposition n'est X-contingente et Y-contingente à la fois (équivalent du principe de contradiction).

Le fait que la négation d'une proposition X-contingente est une proposition Y-contingente (et *vice versa*) et non une proposition impossible ou nécessaire, est une propriété contre-intuitive de la contingence définie par Łukasiewicz. Les formules:

$$p \equiv XXp$$
$$p \equiv YYp$$

décrivent une autre propriété paradoxale de la contingence.

Łukasiewicz résume les problèmes pré-cités par la constatation suivante:

> Ce n'est que dernièrement que la connaissance de la logique classique de propositions s'est popularisée, ce qui a soulevé de vives objections contre certains de ses principes, notamment contre CpCqp [p→(q→p)] et CpCNpq [p→(¬p→q)] qui sont des formes des lois logiques connues déjà des logiciens médiévaux (…). A ma connaissance, ces principes sont à présent acceptés universellement.
> En tout cas, notre système modal ne se trouve pas dans une situation pire que les autres systèmes de la logique modale.[32]

Les présentes réflexions portant sur les conséquences du système Ł-modale engendrent la question de savoir quel est leur statut: sont-elles projetées consciemment par Łukasiewicz ou bien constituent-elle une sorte de « sous-produit » du système qui exige de lui un effort interprétatif ?

Dans le cas des foncteurs jumeaux du Possible, la réponse est relativement facile. Il semble qu'en éliminant du système Ł-modale (en vertu de l'axiome (7) ┤◊p) le paradoxe lié à l'existence des propositions contingentes vraies, Łukasiewicz était obligé de surmonter une conséquence contre-intuitive qui consiste à réfuter la formule ◊p ∧ ◊¬p pour tous les p. Les foncteurs jumeaux du Possible qui permettent de définir les notions de X-contingence et Y-contingence lui ont fourni une solution.

Il est plus difficile de répondre à la question concernant le statut de la conséquence qui consiste à éliminer les propositions vraies catégoriques du système Ł-modale. Certains des chercheurs, entre autres Marek Lechniak[33], affirment que la réfutation des vraies propositions nécessaires n'est pas une conséquence du système Ł-modale, mais une prémisse de nature philosophique sur laquelle il a été construit. Łukasiewicz réfuterait les vraies propositions apodictiques, entre autres,

---

[32] *Ibidem*, p. 241.

[33] M. Lechniak, *Kilka uwag o Jana Łukasiewicza rozumieniu konieczności*, „Roczniki Filozoficzne", 48 (2000), no 1.

en raison de ses convictions concernant la possibilité d'une action. Une autre motivation qui pourrait provoquer la réfutation du Nécessaire serait l'empirisme radical de Łukasiewicz qui lui imposerait d'effacer les différences entre les sciences aprioriques et les sciences empiriques.

En effet, certaines affirmations de Łukasiewicz semblent confirmer l'interprétation de Lechniak: « la nécessité suppose une contrainte, la contingence suggère un hasard »[34].

Aussi Łukasiewicz constate:

> (…) si l'urne contient des billes blanches et noires et que l'on en a tiré deux au sort, alors je peux pronostiquer *a priori* que seulement quatre combinaisons sont possibles: blanche-blanche, blanche-noire, noire-blanche et noire-noire. Les axiomes de la logique et des mathématiques s'appuient sur de telles expériences; il n'y a aucune différence fondamentale entre les sciences aprioriques et aposterioriques[35].

Lechniak interprète la constatation pré-citée comme un passage vers une position radicalement empirique à la suite de quoi la réfutation des vraies propositions apodictique serait judicieuse.

Aussi peut-on chercher les raisons de la réfutation des vraies propositions nécessaires parmi les opinions de Łukasiewicz portant sur la relation entre les sciences aprioriques et aposterioriques:

> Aristote, étant sous l'influence de la théorie platonicienne des Idées, a développé la logique des termes généraux et il a présenté une opinion sur le Nécessaire qui, à mon avis, s'est avéré fatal pour la philosophie. Les propositions attribuant des traits distinctifs aux objets sont, selon lui, non seulement factuellement vraies, mais aussi vraies par nécessité. Cette fausse distinction est devenue un point de départ d'une longue évolution menant à la division des sciences en deux groupes: sciences aprioriques composées des théorèmes apodictiques telles que la logique et les mathématiques et les sciences aposteriori-ques ou empiriques, composées surtout des propositions asertoriques basées sur l'expérience. Je crois que cette division est fausse. Les

[34] J. Łukasiewicz, *Sylogistyka Arystotelesa z punktu widzenia współczesnej logiki formalnej*, op. cit., p. 275.

[35] *Ibidem*, p. 276.

vraies propositions apodictiques n'existent pas et du point de vue de la logique, il n'y a pas de différence entre la vérité mathématique et empirique.[36]

On peut supposer que Łukasiewicz réfutait la division fondamentale des sciences basée sur la relation à l'expérience, ce qui a mené à la réfutation des propositions apodictiques.

Cette citation montre aussi que Łukasiewicz réfutait l'essentialisme aristotélicien. De même, on ne peut pas exclure le fait qu'il partageait l'avis présenté par Quine dans la conclusion de l'article *Three Grades of Modal Involvment*, selon lequel la quantification dans les contextes modaux mènerait à l'essentialisme, puisqu'il est certain qu'il connaissait le texte de Quine[37]. Quine a présenté un exemple illustrant la véracité de la thèse de l'essentialisme[38]: pour un p quelconque étant une proposition occasionnellement vrai, la formule suivante est vraie:

$$\forall x[\Box(x = x) \wedge (x = x \wedge p) \wedge \neg\Box(x = x \wedge p)]$$

Il n'est pas difficile de remarquer que la première proposition de la conjonction décrit le caractère nécessaire de chaque objet, alors que les deuxième et troisième propositions décrivent le caractère occasionnel. Nous notons aussi que l'argument de Quine s'écroule si, en accord avec les convictions de Łukasiewicz, nous réfutons la première proposition de la conjonction celle-ci étant une proposition nécessaire. Cela pouvait constituer encore une prémisse qui a poussé Łukasiewicz à la réfutation des vraies propositions nécessaires.

Néanmoins, les arguments pré-cités, qui soutiennent l'hypothèse selon laquelle la réfutation des vraies propositions nécessaires serait plutôt une prémisse philosophique qu'une des conséquences du système Ł-modale, ne sont pas conclusives. Tout d'abord, il faudrait attirer l'attention sur le fait que Łukasiewicz n'était pas obligé

[36] *Ibidem*, p. 274-275.

[37] J. Łukasiewicz, *Arytmetyka i logika modalna*, idem, *Logika i metafizyka*, op. cit., p. 334.

[38] W. V. Quine, *Three grades of modal involvement*, idem, *The Ways of Paradox*, Oxford University Press 1966, p. 162.

de réfuter l'existence de vraies propositions nécessaires pour sauver son intuition de base: la conviction que la création libre est possible. Rappelons que l'argument contre le déterminisme causal fondé sur l'analogie entre les enchaînements de cause à effet et les suites géométriques convergentes lui a permis de surmonter le déterminisme logique, sans être obligé de faire appel à des moyens si radicaux que la réfutation de la véracité des propositions catégoriques[39]. Cette observation paraît d'autant plus pertinente que Łukasiewicz maintenait l'argument concernant la finitude temporelle des suites cause-conséquence jusqu'à la fin de sa vie. Il le mentionne dans la deuxième édition de l'ouvrage intitulé *Sylogistyka Arystotelesa z punktu widzenia współczesnej logiki formalnej* du 1955[40]. En outre, si nous remarquons que la liberté postulée par Łukasiewicz n'exige pas que l'on admette que tous les faits futurs soient indéterminés, mais que seulement certains parmi eux le soient, alors l'interprétation présentée par Lechniak ne semble pas convaincante.

Pour répondre à la question de savoir quel est le statut des solutions logiques proposées par Łukasiewicz, il est très important d'avoir pris connaissance de ses idées métaphilosophiques. Rappelons qu'en construisant la méthode de la philosophie scientifique en 1927, il postulait non seulement de l'appuyer sur un système d'axiomes et sur des règles d'inférence, mais aussi il croyait que « les résultats obtenus de cette manière doivent être comparées sans cesse avec les donnés de l'intuition et de l'expérience et avec les résultats des autres sciences, surtout naturelles »[41]. Même si, dans les années 1950, il avait une approche davantage conventionnaliste et instrumentaliste, il ne serait pas fondé de dire qu'il a abandonné la conception imposant de mettre

[39] J. Łukasiewicz, *O determinizmie*, idem, *Z zagadnień logiki i filozofii*, op.cit.

[40] J. Łukasiewicz, *Sylogistyka Arystotelesa z punktu widzenia współczesnej logiki formalnej*, op. cit., p. 277.

[41] J. Łukasiewicz, *O metodę w filozofii*, idem, *Logika i metafizyka*, op. cit., p. 42.

en accord les systèmes logiques (constituant la base de la philosophie scientifique) avec les résultats des sciences exactes. Il modifia sa position antérieure en disant que l'expérience ne peut jamais indiquer le seul vrai système de la logique, mais cela ne signifie pas qu'il abandonnait complètement la conception de vérification des conséquences des systèmes logiques en utilisant l'expérience.

Il semble que les résultats qui ont apporté une révision de la logique modale pouvaient être fournis par la mécanique quantique. Les mots qui l'attestent ont été prononcés en 1946 dans l'introduction à la première édition de l'article *O determinizmie* constituant un remaniement d'un discours de 1922:

> Au moment où je prononçais ce discours, je ne connaissais pas encore les faits et les théories du domaine de la physique atomique, qui ont remis en question le déterminisme. Je ne complète pas cet article par des réflexions de ce domaine pour ne pas dériver du texte original du discours ni rompre sa construction.[42]

Probablement sous l'influence de la mécanique quantique, Łukasiewicz a radicalisé sa position dans le cadre du déterminisme en admettant qu'aucun fait n'est déterminé dans le sens causal, ce qui trouve son reflet dans le fait de réfuter les propositions catégoriques.

Néanmoins, il semble que ce soient les paradoxes modaux décrits dans le chapitre précédent qui constituait la prémisse essentielle de la réfutation des vraies propositions catégoriques. Łukasiewicz, lui-même, les a indiqué comme étant la source du système Ł-modal. Il paraît vraisemblable que les résultats obtenus par la mécanique quantique ainsi que les réflexions purement logiques liés aux paradoxes logiques influençaient parallèlement Łukasiewicz: confronté aux paradoxes, il choisit une solution qui était en même temps cohérent avec les résultats que fournissait la physique contemporaine.

Finalement, il faut présumer que les paradoxes étaient la raison la plus probable de la réfutation des vraies propositions nécessaires

[42] J. Łukasiewicz, *O determinizmie*, op. cit., p. 114.

dans le système Ł-modal. Afin de les surmonter en gardant en même temps l'extensionnalité du système logique modal projeté, Łukasiewicz a décidé d'adopter une solution controversée qui consistait à éliminer les propositions qui engendrent les paradoxes. Ainsi, les jugements prononcés par Łukasiewicz sur la défectuosité de la division des sciences en aprioriques et aposterioriques, ainsi que la réfutation du Nécessaire en tant que « supervérité » superflue, semblent être une simple conséquence de la solution adoptée qui servait à se démunir des paradoxes modaux. Les arguments présentés dans ce contexte par Łukasiewicz servent davantage à l'interprétation des conséquences contre-intuitives du système Ł-modale.

Il vaut la peine de se rendre compte du fait que le raisonnement, qui a amené Łukasiewicz à la réfutation des vraies propositions catégoriques, repose sur la prémisse s'appuyant sur l'extensionnalité des foncteurs modaux: le créateur-même du système Ł-modale, désigne les formules retrouvés dans les *Premiers Analytiques* d'Aristote du nom des « lois d'extensionnalité ». En réfutant cette supposition, Łukasiewicz pouvait se démunir des paradoxes sans nécessairement recourir à une solution aussi radicale que la modification de la logique modale qu'il a proposée.

C'est justement l'extensionnalité du système Ł-modale a provoqué la majorité des controverses qui l'accompagnaient. Arthur Prior s'est avéré, encore une fois, le critique et interprétateur du système le plus perspicace. Un des arguments qu'il a présenté contre le système Ł-modale se fonde sur la distinction scolastique entre *necessitas consequentiae* (p.ex. une proposition vraie « Par nécessité, si quelqu'un est logicien, alors quelqu'un est logicien») et *necessitas consequentis* (une proposition fausse « Si quelqu'un est logicien, alors par nécessité quelqu'un est logicien »). Cependant, comme Prior le remarque, selon une des lois du système Ł-modale, *necessitas consequentiae* implique *necessitas consequentis*: $\Box(p \to q) \to (p \to \Box q)$[43].

[43] A. N. Prior, *Time and Modality*, Oxford 1957, p. 3.

Prior formule aussi un argument contre l'extensionnalité des foncteurs modaux du système Ł-modale. En utilisant un foncteur de la « nécessité contingente » désigné par Q[44], une loi de la Protothétique de Leśniewski[45] et une thèse modale d'Aristote sous forme $Qp \rightarrow Q\neg p$[46], il démontre une formule paradoxale: $Qp \rightarrow Qq$[47] pour les p et q arbitraires. Prior indique que le remplacement de δ par Q est la source du problème. A son avis, le foncteur du Nécessaire contingent n'est pas extensionnel, donc il ne peut pas remplacer δ. Il est intéressant de voir que cet argument est une réinterprétation d'un raisonnement présenté par Łukasiewicz dans un exposé *O zmiennych funktorach od argumentów zdaniowych*[48]. Les raisonnements de Prior et de Łukasiewicz sont menés de la même manière, cependant avec une différence: Łukasiewicz indique que la thèse modale d'Aristote est une source de la conclusion paradoxale, alors que Prior voit cette source dans l'extensionnalité des foncteurs de la logique modale[49].

Pareillement à la logique L_3, Prior a proposé une interprétation de la logique Ł-modale qui est censée expliquer ses conséquences contre-intuitives[50]. Notamment, il a noté que malgré la polysémie des termes modaux dans les différents systèmes, il existe une limite minimale et maximale de significations que peuvent admettre la possibilité et la nécessité. En effet, 'il est possible que *p*' selon Prior ne signifie jamais plus que *p* ni moins que 'si *p*, alors *p*'. Pareillement 'il est nécessaire que *p*' ne signifierait jamais moins que *p* ni plus que '*p* et non-*p*'. Dans tous les systèmes modaux à l'exception du système

[44] $Qp =_{df} \Diamond p$ □ $\Diamond \neg p$

[45] $\delta p \rightarrow (\delta \neg p \rightarrow \delta q)$

[46] Aristote, *Premiers Analytiques,* Livre Premier, ch. 13, 32a.

[47] A. N. Prior, *Formal Logic*, Oxford 1962, p. 191.

[48] J. Łukasiewicz, *O zmiennych funktorach od argumentów zdaniowych,* idem, *Z zagadnień logiki i filozofii*, Warszawa 1961, p. 250.

[49] A. N. Prior, *The Interpretation of Two Systems of Modal Logic*, „The Journal of Computing Systems", vol.1, no. 4, 1954.

[50] A. N. Prior, *Time and Modality*, Oxford 1957, p. 4-5, et A. N. Prior, *The Interpretation of Two Systems of Modal Logic*, op. cit.

Ł-modale, ces limites se trouvent en dehors du cadre des significations qui peuvent être admises par la possibilité et nécessité. Cependant, dans le système Ł-modale, les modalités se comportent comme si elles étaient des foncteurs propositionnels variables d'un argument propositionnel à la portée restreinte: la possibilité signifie une tautologie $p \rightarrow p$ ou une assertion *p*, et la nécessité signifie une assertion *p* ou une contre-tautologie $p \wedge \neg p$. Les formules vérifiées par le remplacement de la possibilité par $p \rightarrow p$ aussi bien que par *p*, et de la nécessité par le *p* aussi bien que par $p \wedge \neg p$ sont les thèses du système. Notamment, la formule $p \rightarrow \Diamond p$ est une thèse de la logique Ł-modale, puisqu'elle est une tautologie quand on remplace $\Diamond p$ par le seul *p* aussi bien que quant on le remplace par l'implication $p \rightarrow p$. Ainsi, $\Diamond p$ n'est pas une thèse de la logique Ł-modale, puisqu'elle ne se produit pas après avoir remplacé le $\Diamond p$ par le p seul. Selon Prior, les propriétés contre-intuitives des foncteurs jumeaux du Nécessaire résultent du fait qu'elles prennent la valeur des limites opposées: pendant que M prend la valeur de p, W prend la valeur $p \rightarrow p$ et *vice versa*.

Cette interprétation de Prior a été sans doute inspirée par les mots de Łukasiewicz-même:

> Les formules avec $\Diamond$ sont, bien sûr, un produit des formules vérifiées par S (assertion) et V (verum). La formule $p \rightarrow \Diamond p$ est admise, puisqu'elle est admise pour $\Diamond = S$ et $\Diamond = V$. Les formules $\Diamond p \rightarrow p$ et $\Diamond p$ sont réfutées, car on réfute la première formule pour $\Diamond = V$ et le deuxième pour $\Diamond = S$. Ainsi, nous pouvons obtenir le produit de S et V en multipliant S par V ce qui résulte en fonction $\Diamond(a, x) = (Sa, Vx) = (a, x \rightarrow x)$ (…).[51]

La dernière phrase de Łukasiewicz se réfère à la manière « technique » de remplir la table de vérité pour le foncteur du Nécessaire dans le système Ł-modale[52].

[51] J. Łukasiewicz, *System logiki modalnej*, idem, *Logika i metafizyka*, op. cit., p. 289.

[52] *Ibidem*, p. 287.

L'interprétation de Prior devient compréhensible, si nous présumons qu'elle concerne la puissance informative des foncteurs du Possible et du Nécessaire[53]. Prior lui-même suggère une telle lecture de la modalité, en affirmant que la possibilité est plus faible du point de vue de la déduction que l'assertion (car la formule p → ◊p est admise, mais la formule ◊p → p est réfutée), mais elle n'est pas si faible que la tautologie (la formule ◊p est réfutée)[54]. Grâce à la compréhension informative de l'interprétation de Prior son exemple du cadre de la pratique linguistique devient aussi vraisemblable: la constatation « il est possible que *p* » signifie souvent que celui qui la prononce s'engage soit à admettre que *p*, soit à admettre la tautologie qui possède la force informative zéro[55]. Le Possible devrait signifier soit une assertion soit une tautologie, quoiqu'une sorte d'ambiguïté du foncteur du Possible n'ait pas de caractère épistémique – rappelons que Łukasiewicz réfutait les réflexions épistémiques en tant que méthode philosophique valable.

L'interprétation de Prior met en lumière les prémisses reposant sur les bases du système Ł-modale et sur ses conséquences particulières. Ces dernières ne sont pas conformes aux intuitions modales contemporaines de la loi de l'extensionnalité, mais elles deviennent compréhensibles, si nous nous rendons compte qu'aussi bien le Possible que le Nécessaire, dans le système Ł-modale, sont compris de la même manière que Prior les a démontrés. Pareillement, les possibilités jumelles cessent d'être particulières si elles sont interprétées comme un seul foncteur variable qui prend des valeurs opposées pour chacun des 'jumeaux'[56].

Notons certains faits historiques importants, liés à la création des systèmes modaux polyvalents de Łukasiewicz. En analysant la

[53] L'auteur doit l'interprétation des modalités en terme de la puissance informative a docteur Piotr Wilkin.

[54] A. N. Prior, *The Interpretation of Two Systems of Modal Logic*, op. cit., p. 204.

[55] A. N. Prior, *Time and Modality*, op. cit., p. 5.

[56] Si M est interprété comme p → p, W est interprété comme p et *vice versa*.

correspondance entre Łukasiewicz et Twardowski[57], on voit clairement que ce premier, en créant la logique modale trivalente, a pris connaissance du système de Lewis fondé sur l'implication stricte, décrit dans l'ouvrage *A Survey of symbolic logic*[58]. En décrivant la genèse de son système Ł-modale, il se réferait au système de Lewis et Langford décrit dans un travail intitulé *Sybolic Logic*[59], assez abondamment commenté déjà à ce moment-là. Malgré cela, Łukasiewicz décida de soutenir les intuitions concernant l'extensionnalité des foncteurs modaux qui l'accompagnaient dès le moment de la création du premier système modal. En même temps, il a réinterprété les notions modales qui, dans le système Ł-modal, ont pris le statut de foncteurs propositionnels variables prenant les propriétés de tautologie, par le biais de l'assertion à la contre-tautologie. Procédant ainsi, il a apporté une originalité exceptionnelle à son système, en le situant, à la fois, en dehors du courant principal des recherches sur les logiques modales. En conséquence, le système Ł-modale n'a jamais été au coeur des intérêts. Peut-être que dans la décision de Łukasiewicz retentit un écho de ses convictions sur la philosophie nationale polonaise ; peut-être qu'en faisant un choix original concernant l'extensionnalité de la logique modale et la réfutation des vraies propositions nécessaires qui l'accompagne, il essayait de faire renaître cette « seule pensée grandiose et familière » autour de laquelle devrait se concentrer la philosophie polonaise scientifique[60].

Après la période dans laquelle on commentait, en particulier, les résultats contre-intuitifs des constructions modales de Łukasiewicz, ils tombent dans l'oubli. Certains des commentateurs croient même que les systèmes de Łukasiewicz ne peuvent pas être considérés comme

[57] J. Łukasiewicz, *Logika i metafizyka*, op. cit., p. 486-488.

[58] C. I. Lewis, *A Survey of symbolic logic*, Berkeley 1918.

[59] C. I. Lewis, C. H. Langford, *Symbolic logic*, New York 1932.

[60] J. Łukasiewicz, *Heinrich von Struve. Die Polnische Philosophie der Letzten Zehn Jahre (1894−1904)*, *idem*, *Logika i metafizyka*, Warszawa 1998, p. 384.

des logiques modales. Susan Haack a résumé leur statut en affirmant que le système Ł-modale (aussi bien que le système L3) ne peut pas être considéré comme une logique modale dans le sens propre du mot, justement en raison de l'extensionnalité des foncteurs modaux[61]. La thèse de Haak semble, pourtant, fausse: comme l'a démontré Prior par le biais des interprétations de la logique L_3 et Ł-modale, il ne serait pas justifier de dépourvoir les termes modaux utilisés dans ces systèmes de leur signification intuitivement palpable. En effet, cette signification est fondamentalement différente de la conception du Nécessaire et du Possible reconnue à l'heure actuelle, mais cela ne signifie pas qu'il faut la présumer fausse.

A présent, les logiques de Łukasiewicz ne sont pas, en général, qualifiées de systèmes modaux. Notamment, l'histoire de la logique de William et Martha Kneal ne mentionne pas les systèmes L_3 et Ł-modal dans le chapitre concernant les logiques modales[62]. Une mention sur la logique modale trivalente apparaît dans le chapitre portant sur les logiques alternatives, cependant les auteurs insistent sur le fait que la notion du Possible utilisée par Łukasiewicz diffère profondément de celle utilisée par Lewis[63]. De même, les monographies contemporaines ne font pas référence aux systèmes modaux du logicien polonais[64].

[61] S. Haack, *Deviant Logic*, Cambridge 1974, p. 89.

[62] W. Kneale, M. Kneale, *The Development of Logic*, Oxford 1986, p. 548-568.

[63] *Ibidem*, p. 571.

[64] G. E. Hughes, M. J. Cresswell, *A New Introduction to Modal Logic*, London and New York 1996.